

光學系統之繞射模擬及預測

劉冠揚、蔡睿哲*

微光機電系統設計實驗室, 光電工程學研究所, 國立臺灣大學, 台北 10617, 台灣

摘要:

使用 Matlab 模擬近場繞射-Fresnel diffraction 隨距離增加之光場與光強度分布, 找出有效可使用距離, 並且透過結果修正程式中最小所需運算像素點; 此外, 使用快速傅立葉(Fast Fourier transform, FFT)轉換 Fresnel 積分公式優化計算效率, 成果將運用於協助精進光學系統設計品質。

Keywords: Fresnel diffraction, Fraunhofer diffraction, Fourier optical, Fast Fourier transform, Optical system

一、簡介

在光學中, 繞射是一個重要的課題, 當光被視為波動通過障礙物時, 所產生波的大小和形狀會與初始場形不同並且會偏離原來的傳播路徑, 我們將這種現象成為繞射, 其相關繞射定理由 Huygens, Fresnel, Kirchhoff 和 Sommerfeld 等人所研究發展; 當經由 Rayleigh-Sommerfeld region 後簡化, 依據傳播距離的遠近又可以分為 Fresnel diffraction 和 Fraunhofer diffraction 的近似結果, 其中 Fraunhofer region 被視為遠場近似, 存在於繞射孔徑與 Fraunhofer region 間的區域則被視為近場近似, 如圖一所示。

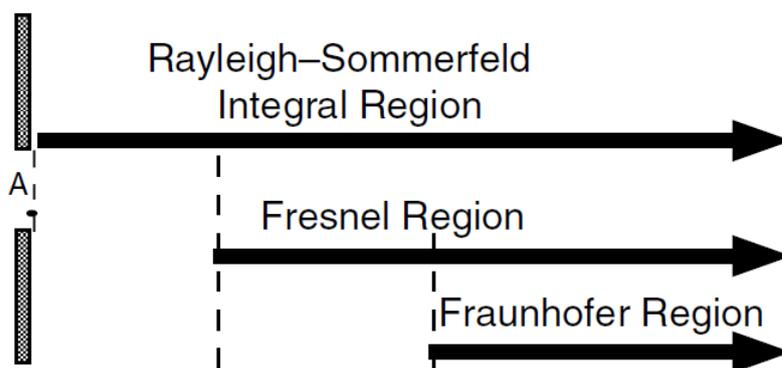


圖 1. 三種繞射區域示意圖^[1]

傅立葉分析大幅運用於通訊、物理和工程領域, 在光電範疇中的傅氏光學則包含連續空間和離散空間傅立葉變換, 當其計算涉及線性和卷積關係時, 該運算即可藉由傅立葉轉換表達光在自由空間中傳播的方式, 此方法已成為

近代光學分析繞射、成像和光通訊領域中不可或缺的利器。基於龐大複雜的積分運算，繞射公式經由傅立葉轉換式中的離散傅立葉轉換(Discrete Fourier Transform, DFT)和快速傅立葉變換式(Fast Fourier Transform, FFT)改寫，能大幅節省電腦運算積分所消耗的時間，使我們能夠更有效率的計算在不同條件下繞射分布。

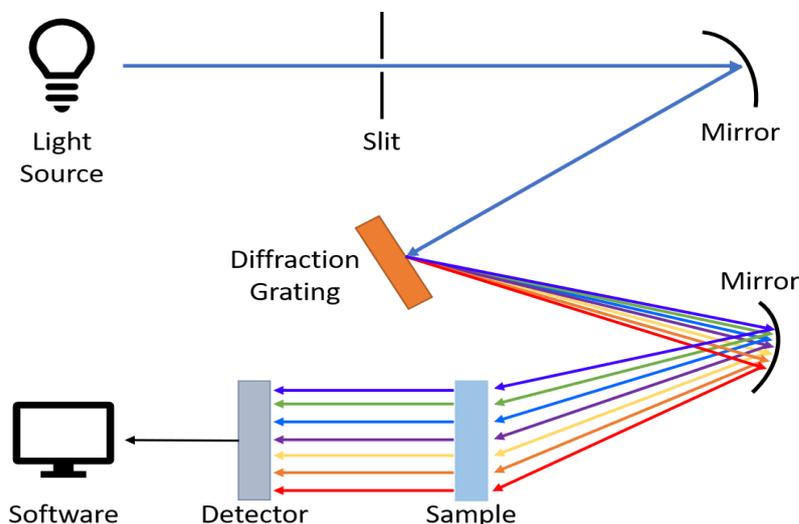


圖 2. 光譜儀架構示意圖^[2]

在光學系統中有許多應用皆是運用繞射所達成，通稱為繞射光學元件 (diffractive optical elements, DOE's)，舉例來說：繞射分光使用在光譜儀中量測物體表面反射光進而分析所含的物質(圖二)、繞射成像可以歸納出阿貝成像原理，使顯微鏡物鏡成像得以修正並設計出精良的顯微鏡、繞射波前再現則可以運用於全像術(圖三)；因此我們將基於繞射的基礎，透過 Fresnel 積分公式與傅立葉轉換等不同方法模擬近場至遠場的繞射結果，進一步應用於我們所設計的光學系統之中。

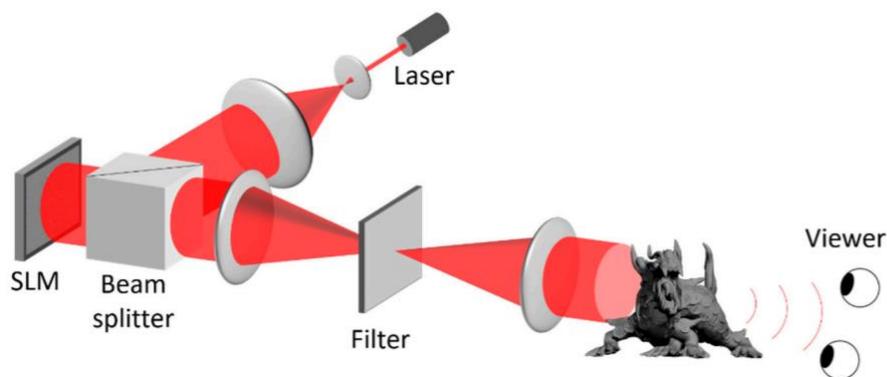


圖 3. 全像術架構示意圖^[3]

二、問題描述

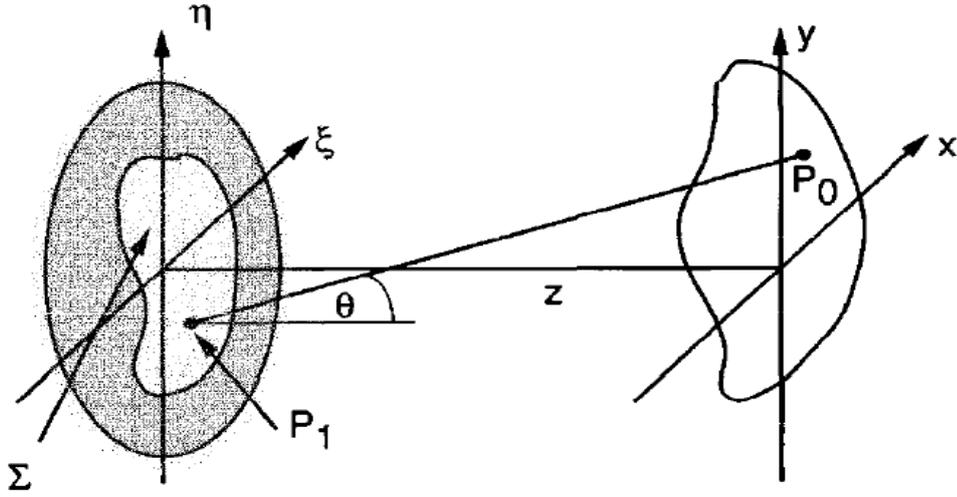


圖 4. 孔徑與接收面座標繞射幾何圖^[4]

從公式 Rayleigh-Sommerfeld Diffraction Formula 近似，Huygens-Fresnel Principle 可表達成公式(1)，其中波數 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 、 λ 為波長、孔徑平面和接收屏幕坐標軸如圖四所示；繞射孔徑位於 (ξ, η) 平面、沿著 z 軸方向傳播、投射至與 (ξ, η) 平面平行之 (x, y) 平面上。

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos\theta ds \quad (\text{式 1})$$

運用 $\cos\theta = \frac{z}{r_{01}}$ ，將 Huygens-Fresnel Principle 改寫成公式(2)。

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta \quad (\text{式 2})$$

P_1 至 P_0 間的長度 $r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}$ ，

再根據泰勒級數展開式 $\sqrt{1 + b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots$ 保留二項展開式後的前

兩項 $r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2 \right]$ ，此時將 r_{01} 趨近結果代入公式 2 中改寫成公式 3。

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{j\lambda z} \iint U(\xi, \eta) \exp\left\{ \frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta \quad (\text{式 3})$$

把 $\exp\left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]$ 提出至積分符號外並分解成公式 4:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint \left\{ U(\xi, \eta) e^{\frac{ik}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{\frac{-ik}{2z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (式 4)$$

公式 3 與公式 4 即為近場繞射近似積分(Fresnel diffraction Integral)表示式。

為了加速計算效率，我們將相位指數變化和複數場的乘積以傅立葉轉換式的形式呈現，引入二維空間的傅立葉轉換式(5)、反傅立葉轉換式(6)和

黎曼和(Riemann sum)的概念 $\iint_{-\infty}^{\infty} \dots dx dy \rightarrow \sum_{n=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{m=-M/2}^{\frac{M}{2}-1} \dots \Delta x \Delta y$:

$$G(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy \quad (式 5)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f_x, f_y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y \quad (式 6)$$

由於 DFT 為離散數值運算的限制，須將黎曼和中連續性質的時域數值 Δx 、 Δy ，轉換為由取樣點(N_x 、 N_y)表達且間隔 p 、 q 整數倍的均勻分布之非連續取樣頻域(sampling frequency)，其轉換如下：

$$\begin{aligned} f_x &\rightarrow \frac{p}{N_x \Delta x}, p = \frac{-N_x}{2}, \dots, \frac{N_x}{2} \\ f_y &\rightarrow \frac{q}{N_y \Delta y}, q = \frac{-N_y}{2}, \dots, \frac{N_y}{2} \\ \Delta f_x &= \frac{1}{N_x \Delta x}, \text{ and } \Delta f_y = \frac{1}{N_y \Delta y} \end{aligned} \quad (式 7)$$

所以在式(6)中的指數項經轉換改寫成式(8)與式(9)：

$$\begin{aligned} \exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)] &\rightarrow \exp\left[-i2\pi\left(\frac{p}{N_x \Delta x} m \Delta x + \frac{q}{N_y \Delta y} n \Delta y\right)\right] \\ &= \exp\left[-i2\pi\left(\frac{pm}{N_x} + \frac{qn}{N_y}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(p\Delta f_x, q\Delta f_y) &= \mathcal{F}\{f(x, y)\} \\ &= \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} f(m\Delta x, n\Delta y) \exp\left[-i2\pi\left(\frac{pm}{N_x} + \frac{qn}{N_y}\right)\right] \end{aligned} \quad (式 8)$$

$$\begin{aligned} f(m\Delta x, n\Delta y) &= \mathcal{F}^{-1}\{G(p\Delta f_x, q\Delta f_y)\} \\ &= \frac{1}{N_x N_y} \sum_{p=0}^{N_x-1} \sum_{q=0}^{N_y-1} G(p\Delta x, q\Delta y) \exp\left[i2\pi\left(\frac{pm}{N_x} + \frac{qn}{N_y}\right)\right] \end{aligned} \quad (式 9)$$

因此 Fresnel diffraction Integral 式(4)可用 DFT 的公式(8)表示為公式(10)、初始光場則可用反傅立葉轉換式(9)表達成公式(11)：

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}\left\{U(\xi, \eta) \exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right]\right\} \quad (式 10)$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{e^{-ikz}}{-i\lambda z} e^{\frac{-ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \mathcal{F}^{-1} \left\{ U(x, y) \exp\left[\frac{-ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \right\} \quad (\text{式 11})$$

把初始光場式(11)帶回所求屏幕平面繞射公式(10)，經 Fresnel diffraction transfer function, $H_{\mathcal{F}}(f_x, f_y) = \mathcal{F} \left\{ \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \right\}$ 化簡後可得式(12):

$$U(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ H_{\mathcal{F}}(f_x, f_y) \times \mathcal{F}\{U(\xi, \eta)\} \right\} \quad (\text{式 12})$$

將 $N \times N$ 取樣矩陣使用快速傅立葉轉換(Fast Fourier transform, FFT)能將運算 DFT 與反傅立葉運算數量從 $2N^2$ 轉換至 $2N \log 2$ ，因此在 Matlab 中我們使用 FFT 去計算 DFT，使我們能夠快速地得到初步繞射結果，如圖五所示。

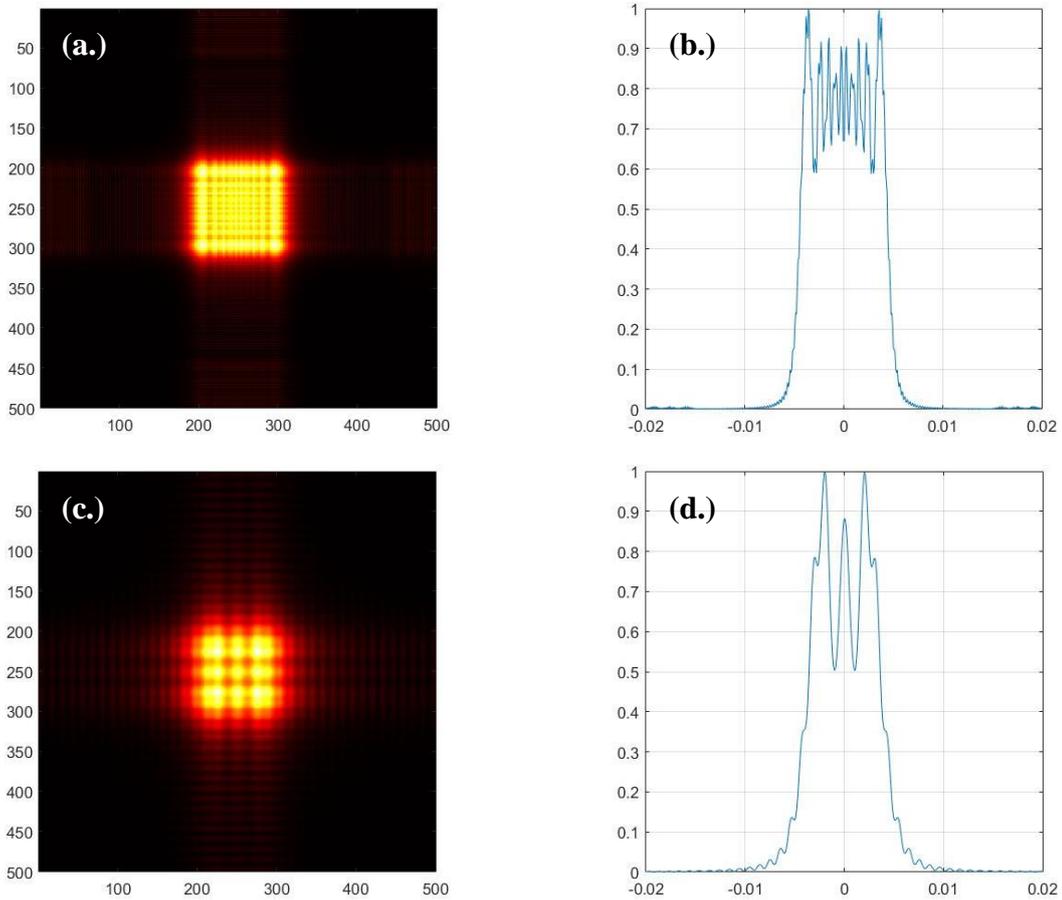


圖 5. 使用不同方法運算在相同傳播距離下之光場與光強度結果，(a.) FFT 光場分布、(b.) FFT 光強度分布、(c.) 積分光場分布和(d.) 積分光強度分布。

綜合上述，我們尚待解決的問題如下:

1. 傳播距離 z 很小時，波數 k ($\approx 10^7$) 值與微小的相位差異造成指數項劇烈變化使光強度存有極端值，且在泰勒級數展開式中省略第二項後所有

的數值($\frac{1}{8}b^2 + \dots$)趨近，因此我們須找出模型最小可接受使用距離來避免誤差。

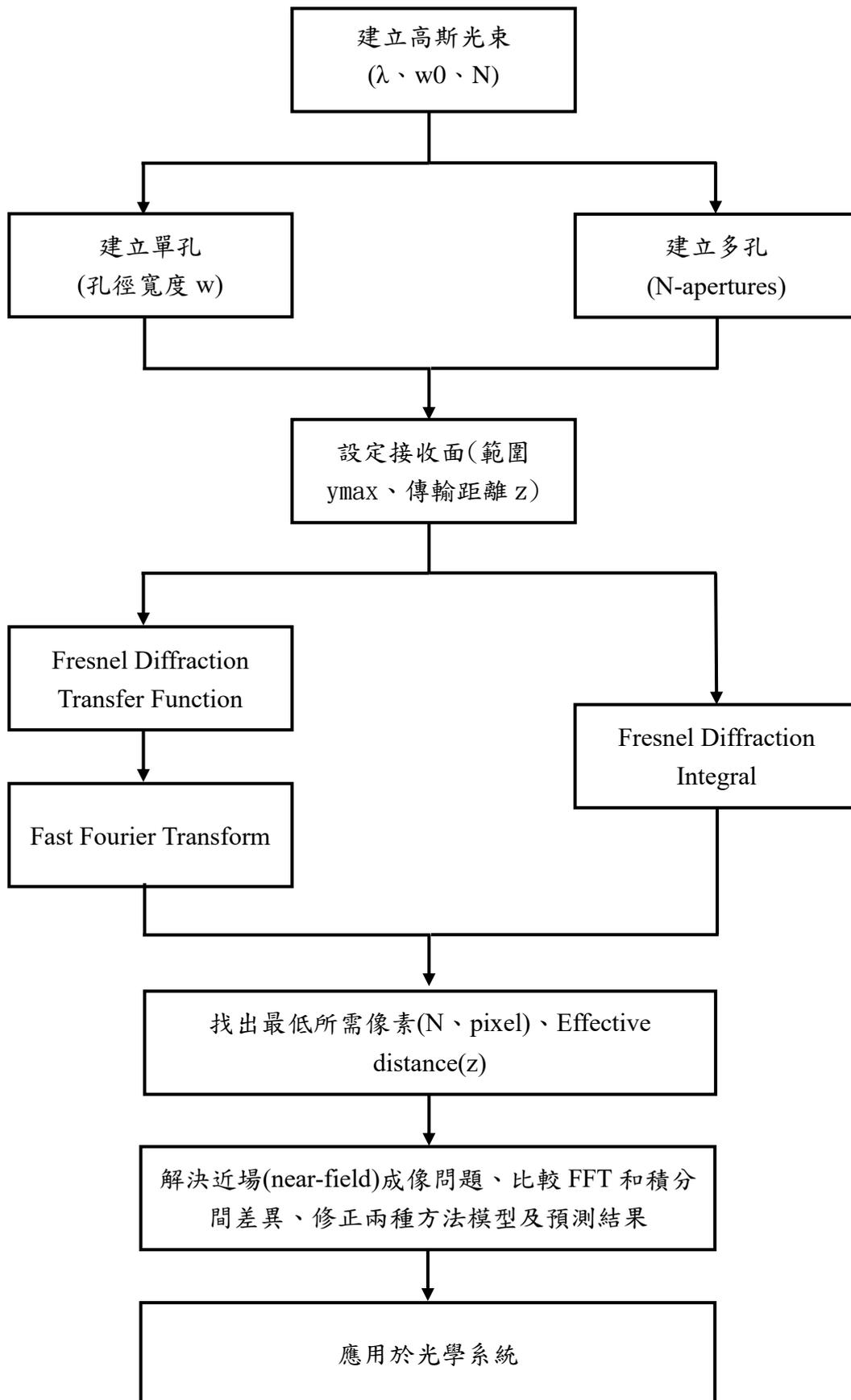
2. 使用 FFT 方法能夠讓我們節省電腦效能與運算時間，但與使用 Fresnel diffraction Integral 公式的結果仍存在些微差異，如圖五所示；我們期望能夠透過使用積分公式運算成果來修正 Fresnel diffraction FFT 模型，使我們能夠兼顧準確度、電腦效能運用和運算時間。
3. 越多取樣點($N \times N$)使單位計算平面被劃分得越精細、解析度越好，當我們提升 N 的數量時 Fresnel diffraction Integral 積分中運算量龐大；由公式(7) $\Delta f_x = \frac{1}{N_x \Delta x}$, and $\Delta f_y = \frac{1}{N_y \Delta y}$ 得知，當我們使用 FFT 方法時，取樣點越多能夠使非連續取樣頻率間隔越小→使其越接近連續狀態，讓 FFT 所運算效果越接近實際數值。因此，不論是使用積分法抑或是 FFT 計算 Fresnel diffraction，都需借助計算中心電腦計算能力，增加取樣點以達成目標。

三、擬採用方法

將運用 Matlab 從初始光場開始建構出四套模型，分別為：

- a. 單方孔徑使用 Fresnel diffraction transfer function + FFT 計算之模型
- b. 單方孔徑使用 Fresnel diffraction integral 計算之模型
- c. 方孔徑陣列使用 Fresnel diffraction transfer function + FFT 計算之模型
- d. 方孔徑陣列使用 Fresnel diffraction integral 計算之模型

其高斯光束條件為實驗室中 He-Ne 雷射波長($\lambda = 632.8 \text{ nm}$)，並設定擴束後的光腰半徑($w_0 = 2.5 \text{ cm}$)讓光束能夠完全通過邊長大小為 1 cm 之正方形單孔徑與方形多孔徑陣列，藉由使用前述公式 Fresnel diffraction transfer function 搭配 Fast Fourier transform (FFT)和 Fresnel diffraction integral，改變傳輸距離(z)、成像面計算切割數量(N)與像素大小，計算出在不同距離下經過單孔徑與多孔徑陣列之光強度分布、二維光場分布；並將兩種方法之結果加以比較分析，求得模型最近可使用距離、修正公式誤差提升可靠度，最終將預測結果應用於光學系統中，相關流程圖如下方表格。



四、預期成效

1. 使用快速傅立葉轉換公式(FFT)減少運算時間、提升運算效率。
2. 透過大量增加計算切割數量(N)使單位像素提升，分析出使用 FFT 和 Fresnel 積分不同方法間誤差，找出模擬可使用之最低有效距離。
3. 找出 Fresnel diffraction 在近場下適當的模擬結果和在遠場 Fraunhofer diffraction 預測光場分布。
4. 建立近場與遠場單孔徑和多孔徑之光學繞射模型，並能夠妥善運用於光學系統中。
5. 建構光學系統運用於波束成型(beam shaping)、光束掃描(beam steering)、光學雷達 (LIDAR, light detection and ranging) 和自由空間光通訊(free-space optical communication)等應用。

五、參考文獻

- [1.] O. K. Ersoy, “Diffraction, Fourier optics and imaging.”, *John Wiley & Sons*, (2006).
- [2.] <https://wavelength-oe.com/blog/what-is-a-spectrometer/>
- [3.] H. Zhang *et al.*, “Scaling of three-dimensional computer-generated holograms with layer-based shifted Fresnel diffraction.”, *Appl. Sci.*, 9(10), (2019).
- [4.] J. W. Goodman, “Introduction to Fourier optics. 3rd.” *Roberts and Company Publishers*, (2005).
- [5.] D. G. Voelz, “Computational Fourier optics: a MATLAB tutorial.”, Bellingham, WA: *SPIE press*, (2011).
- [6.] D. E. Dager, “Simulation and study of Fresnel diffraction for arbitrary two-dimensional apertures.”, *Comput. Phys.*, 10(6), (1996).
- [7.] K. M. Abedin *et al.*, “Fresnel diffraction from N-apertures: Computer simulation by iterative Fresnel integrals method.”, *Optik*, 126(23), (2015).
- [8.] T. Shimobaba *et al.*, “Aliasing-reduced Fresnel diffraction with scale and shift operations.”, *J. Opt.*, 15(7), (2013).
- [9.] J. C. Li *et al.*, “An indirect algorithm of Fresnel diffraction.”, *Opt. Commun.*, 282(4), (2009).
- [10.] H. Qian *et al.*, “Numerical simulation of Fresnel and Fraunhofer diffractions of monochromatic and white light.”, *Opt. Eng.*, 55(8), (2016).